رسالة

فى

خواص المثلث من جهة العمود

لابى على محمد بن الحسن بن الهثيم البصرى رحمه الله تعالى

المتوفى فى سنة اربعمائة وثلاثين من الهجرة

الطبعة الاولى

بمطبعة دائرة المعارف العثمانية

حيدرآباد الدكن

حرسها الله تعالى عن آفات الزمن

سنة ١٣٦٦هـ

١٩٤٧م

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه التوفيق

ان المتقدمين من المهندسين نظروا فى خواص المثلث المتساوى الاضلاع فظهرلهم ان كل نقطة تفرض على ضلع من اضلاع المثلث المتساوى الاضلاع ويخرج منها عمود ان على ضلعى المثلث الباقيين فان مجموعهما مساولعمود المثلث فدونوا ذلك واثبتوه فى كتبهم •

ونظروا فى اعمدة المثلثات الباقية فلم يجدوالها نظاما تاما ولاترتيبا فلم يذكروا فيها شيئا •

ولما كان الحال هذه دعتنا الحاجة الى النظرفى خواص المثلثات فوجدنا لاعمدة المثلث المتساوى الساقين نظاما مطردا ووجدنا لاعمدة المثلث المختلف الاضلاع ايضا نظاما وترتيبا مطردا فلما تبين لنا ذلك القينا فيه هذه المقالة •

ونحن نقدم اولا ما ذكره المتقدمون من خاصة اعمدة المثلث المتساوى الاضلاع ثم نتبعه بما استخرجناه نحن من خواص اعمدة المثلثات الباقية لتكون خواص اعمدة جميع المثلثات مجتمعة فى هذه

المقالة •

اما الذى ذكره المتقدمون فهوكل مثلث متساوى الاضلاع تفرض على احد اضلاعه نقطة ويخرج منها عمودان الى الضلعين الباقين فان مجموعهما مساو لعمود المثلث •

مثال ذلك مثلث – ا ب ج – متساوى الاضلاع وفرض على ضلع – ز ب – نقطة – د – ويخرج منها عمودا – د ه – د ز واخرج عمود – ا ح – فان عمودى – د ه – د ز – مساويان لمجموعهما لعمود – ا ح •

برهان ذلك انا نخرج من نقطة – د – خطا موازيا لخط ب ح – وليكن – د ط ك – فيكون مثلث – ا د ك – متساوى الاضلاع لأنه شبيه بمثلث – ا ب ج – فيكون عمود – د ز – مثل عمود – ا ط – وعمود – د ه – مثل عمود – ط ح – فعمودا – د ه د ز – مثل عمود – ا ح – وذلك هو المراد •

وذكر المتقدمون ايضا ان كل مثلث متساوى الاضلاع يفرض فى داخله نقطة وخرج منها اعمدة الى اضلاع المثلث فان مجموع تلك الاعمدة مساو لعمود المثلث •

مثال ذلك – ا ب ج – متساوى الاضلاع وفرض فى داخله نقطة – د – وخرج منها اعمدة – د ه – د ز – د ح – وخرج عمود – ا ط – فان اعمدة – د ه – د ز – د ح – مجموعه مثل عمود – ا ط

برهان ذلك انا نخرج من نقطة ـ د ـ خطا موازيا لخط ب ج ـ وليكن ـ ك م ل ـ فيكون مثلث ـ ا ك ل ـ متساوى الاضلاع فيكون عمودا ـ دح ـ د ز ـ مساويين بمجموعهما لعمود ا م ـ كما تقدم وعمود ـ د ه ـ مثل ـ م ط ـ فمجموع اعمدة ـ د ه د ز ـ دح ـ مثل عمود ـ ا ط ـ هذا ما ذكره المتقدمون فى هذا المعنى •

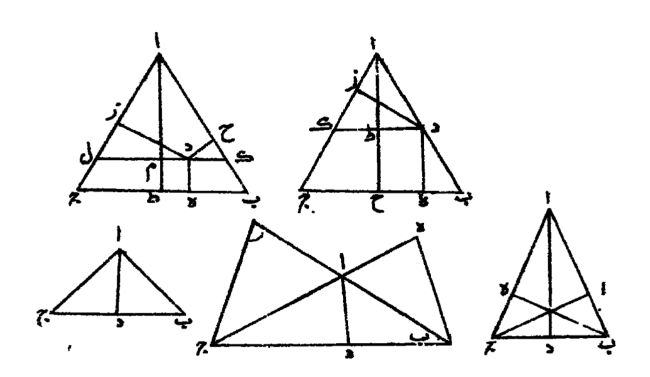
واما الذى استخرجناه نحن فهو الذى نذكره الآن، كل مثلث يخرج من زواياه اعمدة على اضلاعه فان نسبة الضلع الى الضلع بالتكافى •

مثال ذلك مثلث ـ ا ب ج ـ خرج فيه اعمدة ـ ا د ـ ب ه ج ز ـ فاقول ان نسبة عمود ـ ا د ـ الى عمود ـ ب ه ـ كنسبة ا ج ـ الى ـ ج ب ـ وان نسبة عمود ـ ا د ـ الى عمود ـ ج ز كنسبة ـ ا ب ـ الى ـ ب ج •

برهان ذلك ان زاويتى ـ د ـ ه ـ كل واحدة منهما قائمة وزاوية ـ د ج ـ مشتركة فمثلث ـ ا ج د ـ شبيه بمثلث ـ ب ج ه فنسبة ـ ا ج ـ الى ـ ج ب ـ كنسبة ـ ا ج ـ الى ـ ب ه ـ وكذلك تبين ان نسبة ـ ا ب ـ الى ـ ب ج ـ كنسبة ـ ا د ـ الى ـ ج ز فاذا كان المثلث حاد الزوايا فمساقط الاعمدة تكون ثلاثتها فى داخل المثلث على ما فى الصورة الاولى، وان كان المثلث منفرج الزاوية

فواحدة من الاعمدة تكون فى داخل المثلث والعمود ان الباقيان يكونان خارج المثلث على ما فى الصورة الثانية، وان كان المثلث قائم الزاوية فالعمود ان الخارجان من الزاويتين الحادتين اعنى هما ضلعا المثلث المحيطان بالزاوية القائمة فمسقطا العمودين اللذين هما ــ ز ــ ه يكونان عند نقطة ــ ا ــ على ما فى الصورة الثالثة •

ش ــ ١



وتبين هذا الشكل ببرهان آخر، وهوان ضرب كل ضلع فى العمود الواقع عليه هو ضعف المثلث فنسبة كل واحد من اضلاع المثلث الى ضلع غيره هى نسبة العمود الواقع على الضلع الثانى الى العمود الواقع على الضلع الاول وذلك ما اردنا بيانه •

وايضا

وايضا فان كل مثلث قائم الزاوية مختلف الاضلاع خرج من زاوية القائمة عمود على القاعدة ثم نفصل من اعظم قسمى القاعدة من اصغرهما ونوصل بين نهايته وبين الزاوية القائمة بخط ثم تقسم الزاوية التى تبقى من الزاوية القائمة بنصفين فان الجزء الذى ينفصل من القاعدة بين الخط الذى يقسم الزاوية الباقية وبين مسقط العمود مبينا وللعمود ٠

مثال ذلك مثلث ـ ا ب ج ـ زاوية ـ ا ـ منه قائمة وخرج منها عمود ـ ا د ـ وفضل ـ د ه ـ مثل ـ د ج ـ ووصل ـ ا ه وقسمت زاوية ـ ب ا ه ـ بنصفين بخط ـ ا ز ـ فاقول ان ـ ز د مثل ـ د ا ٠

برهان ذلك انزاوية ـ ه ا د ـ مثل زاوية ـ د ا ج ـ فزاوية ه ا د ـ نصف زاوية ـ ه ا ج ـ وزاوية ـ ه ا ز ـ نصف زاوية ـ ه ا ب ـ فزاوية ـ ز ا د ـ نصف زاوية ـ ب ا ج ـ وزاوية ـ ب ا ج ـ قائمة فزاوية ـ زا د ـ نصف قائمة وزاوية وزاوية ـ ا د ز ـ قائمة فزاوية ـ ا ز د ـ نصف قائمة فخط ـ ز د ـ مثل خط ـ د ا ـ وذلك ما اردنا بيانه ٠

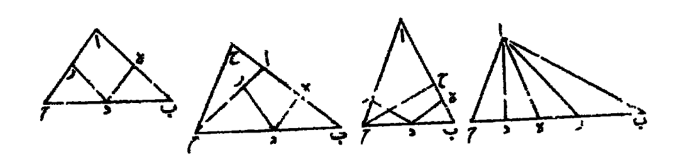
كل مثلث متساوى الساقين يفرض على قاعدة نقطة كيف ما اتفقت ويخرج منها عمودان على ضلعى المثلث فان مجموعهما مساو للعمود الخارج من طرف القاعدة على ضلع المثلث كانت زاوية

المثلث التى يحيط بها الضلعان المتساويان حادة اومنفرجة اوقائمة •

مثال ذلك مثلث ـ ا ب ج ـ متساوى الساقين، ضلعا ـ ا ج ب ا ـ منه متساويان وقاعدة ـ ب ج ـ فى فرض على قاعدة نقطـة د ـ وخرج منهاعمودا ـ د ه ـ د ز ـ فاقول انهما مساويان بمجموعهما لعمود ـ ج ح •

برهان ذلك ان زاويتى ـ ب ـ ج ـ متساويتان وزاويتى ه ـ ز ـ متساويتان لأنهما قائمتان فمثلثا ـ ب ه د ـ د ز ج ـ متشابهان فنسبة ـ ج د ـ الى ـ د ب ـ كنسبة ـ ز د ـ الى ـ د ه ـ وبالتركيب نسبة ـ ز د ـ د ه ـ مجموعين الى ـ د ه ـ كنسبة ـ ج ب ـ الى ـ ب د ونسبة ـ ج ب ـ الى ـ ب د ـ كنسبة ـ ج ح ـ ال ـ د ه ـ فنسبة ز د ـ د ه ـ مجموعين الى ـ د ه ـ كنسبة ـ ج ح ـ الى ـ د ه ـ فعمودا ز د ـ د ه ـ مجموعان مساويان لعمود ـ ج ح ـ وهذا البرهان مطرد فى صفة المثلث وهو المراد •

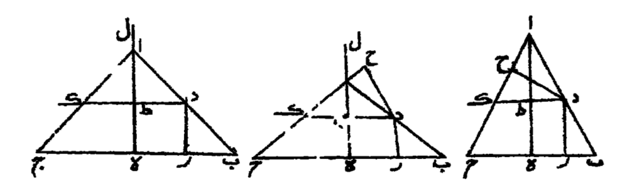
ش ــ ٢



وايضا فانا نعيد الصورة والنقطة المفروضة على ضلع ـ ا ب وليكن نـ د ـ ونخرج منها عمودى ـ د ز ـ د ح ـ ونخرج عمود ا د ـ ونجعل نسبة ـ ا ب ـ الى ـ ب د ـ كنسبة ـ اه ـ الى ـ ه ط ونجعل نسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ل ـ كنسبة ـ ا ج ـ الى ـ ج ب فاقول ان عمودى ـ د ز ـ د ح ـ مثل عمود ـ ا ه ـ •

برهان ذلك انا نصل ـ ب ط ـ وننفذه الى ـ ك ـ فيكون د ك ـ موازيا لخط ـ ب ج ـ لأن نسبة ـ ا ب ـ الى ـ ب د كنسبة ـ ا ه ـ الى ـ ه ط ـ فتكون نسبة ـ ا ه ـ الى ـ ج ب كنسبة ـ ا ك ـ الى ـ ك د ـ ونسبة ـ ا د ـ الى ـ د ب ـ هى كنسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ل ـ فنسبة ـ ا ك ـ الى ـ ك ب كنسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ل ـ ونسبة ـ ا ك ـ الى ـ ك د ـ هى كنسبة ـ ط ـ الى ـ د ح ـ كما نبين فى شكل ـ ج ـ من هذه المقالة فعمود ـ د ح ـ مثل ـ ل ط ـ و ـ د ز ـ مثل ـ ه ط ـ فعمودا د ز ـ د ح ـ مثل عمود ـ ا ه ـ وذلك ما اردنا ان نبين •

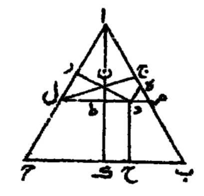
ش ـ ٣



وايضا فانا نعيد المثلث المتساوى الساقين،ولتكن النقطة فى داخل المثلث وليكن المثلث ـ ا د ـ والنقطة ـ د ـ وهى فى داخل المثلث ولتخرج منها اعمدة ـ د ه ـ د ز ـ د ح ـ ونخرج من نقطة ـ د خطا متوازيا لخط ـ ب ج ـ وليكن ـ م د ل ـ •

ونخرج عمود ـ ا ط ـ ونجعل نسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ب كنسبة ـ ا ب ـ الى ـ ب د ـ التى هى نسبة ـ ا م ـ الى ـ م ل فاقول ان اعمدة ـ د ه ـ د ز ـ د ح ـ مجموعه مثل عمود ـ ن ك •

برهان ذلك انا نخرج عمود ـ ل ز ـ فلأن نسبة ـ ا ط ـ الى ط ن ـ كنسبة ـ ا م ـ الى ـ م ل ـ يكون ـ ط ن ـ مثل ـ ل ز وقد تبين ان عمودى ـ د ه ـ د ز ـ مثل عمود (١) وعمودا ـ د ه د ز ـ مثل عمود ـ د ط ـ وعمود ـ د ج ـ مثل عمود ـ ط ك ـ فمجموع اعمدة ـ د ه ـ د ز ـ د ح ـ الثلاثة مساوية لعمود ـ ن ك ـ وذلك ما اردنا بيانه • ش ـ ٤



(١) هنا خرم فى الاصل

وهذا

وهذا البرهان مطرد فى جميع المثلثات المساوية الساقين الحاد منها والمنفرج والقائم .

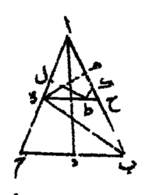
وايضا فانا نعيد المثلث المتساوى الساقين وليكن مثلث ا ب ج ـ ونقسم زاوية ـ ا ب ج ـ منه بنصفين بخط ـ د ه ونخرج ـ ه ح ـ موازيا القاعدة ـ ب ج ـ ونخرج عمودا ـ ز ـ د فاقول ان كل نقطة تفرض على خط ـ ه ح ـ ويخرج منها عمود ان على خطى ـ ا ه ـ ا ح ـ فانهما مجموعان مساويان لعمود ـ ز د ونفرض على خط ـ ه ح ـ نقطة ـ ط ـ ونخرج منها عمودى ط ك ـ ط ل ـ فاقول ان ـ ط ك ـ ط ل ـ مجموعين مساويان لعمود (١) .

برهان ذلك انا نخرج عمود ـ ه م ـ فلأن ـ ه ح ـ مواز لخط ـ ج ب ـ تكون زاوية ـ ح ه ب ـ مساوية لزاوية ـ ه ب ج وزاوية ـ ه ب ج ـ مساوية لزاوية ـ ه ب ح ـ فزاوية ـ ح ه ب مساوية لزاوية ـ ه ب ح ـ فخط ـ ه ح ـ مثل خط ـ ح ب فنسبة ـ ا ح ـ الى ـ ح ب ـ هى نسبة ـ ا ح ـ الى ـ ح د ونسبة ـ ا ح ـ الى ـ ح ب ـ هى نسبة ـ ا ز ـ الى ـ ز د ـ ونسبة ا ح ـ الى ـ ح ه ـ هى نسبة عمود ـ ا ز ـ الى عمود ـ ه م ـ فنسبة ا ز ـ الى ـ ز د ـ هى نسبة ـ ا ز ـ الى ـ ه م ـ فعمود ـ ه م ـ مثل ز د ـ وعمود ـ ه م ـ هو مثل عمودى ـ ط ك ـ ط ل ـ كما تقدم

(١) هنا خرم فى الاصل .

فعمودا ــ ط ك ــ ط ل ــ مجموعين مثل عمود ــ ز د •

ش ــ ه



وهذا البرهان مطرد فى جميع المثلثات المتساوية الساقين •

كل مثلث متساوى الساقين حادا الزوايا فان زيادة ضلعيه الذى هو احد ساقيه على عموده الذى يقع على ذلك الضلع وزيادة العمود على مسقط مجراه وضعف مسقط الحجر فالثلاثة متوالية على نسبة واحدة فليكن مثلث ــ ا ب ج ــ متساوى ساقى ــ ا ب ــ ا ج وزواياه الثلاث حادة وليخرج فيه عمود ــ ج ه ــ فاقول ان زيادة اب ــ على ــ ج ه ــ وزيادة ــ ج ه ــ على ــ ه ب ــ وضعف ــ ه ب الثلاثة متوالية على نسبة واحدة •

برهان ذلك انا نخرج عمود ــ ا د ــ وعمود ــ د ح ونجعل ــ ح ه ــ مثل ــ ح ب ــ ونصل ــ ه د ــ ونقسم زاوية ــ اده بنصفين بخط ــ د ز ــ فيكون ــ ز ح ــ مثل ــ ح د ــ كما تبين فى شكل ــ د ــ من هذه المقالة ونصل ــ ج ه ــ فلأن ــ ج ب ــ ضعف

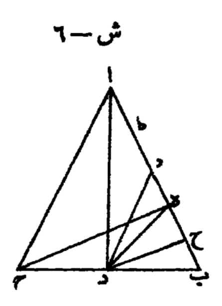
ب د ـ و ـ ه ب ـ ضعف ـ ب ح ـ يكون ـ ج ه ـ موازيا ـ لد
ح ـ ويكون ـ ج ه ـ ضعف ـ د ح ـ فيكون ـ ج ه ـ عمودا
على ـ ا ب ـ ولأن ضرب ـ ا ح ـ فى ـ ح ب ـ مثل مربع ـ اد
يكون ضرب ـ ا ح ـ فى ـ ح ه ـ مثل مربع ـ ح ز ـ فنسبة
ا ح ـ الى ـ ح ز ـ كنسبة ـ ح ز ـ الى ح ه ـ وكنسبة ـ ا ز ـ الى
ز ه ـ و ـ ح ز ـ اعظم من ـ ح ه ـ لان ـ د ز ـ اعظم من ـ ح ب ٠

وذلك ان ـ ا د ـ اعظم من ـ د ب ـ لأن زاوية ـ ب ا ح
حادة فخط ـ ا ز ـ اعظم من خط ـ ز ه ـ فنجعل ـ ز ط ـ مثل
ز ه ـ فتكون نسبة ـ ا ز ـ الى ـ ز ط ـ كنسبة ـ ز ح ـ الى
ح ه ـ فنسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ز ـ كنسبة ـ ز ه ـ الى ـ ه ح
فضرب ـ ا ط ـ فى ـ ح ه ـ مثل ـ مربع ـ د ه ـ فضرب ـ ا ط
فى ـ ه ب ـ مرتين مثل نسبة واحدة ٠

ولأن ـ ز ه ـ مثل ـ ز ط ـ و ـ ه ح ـ مثل ـ ح ب ـ يكون
ط ب ـ ضعف ـ ح ز ـ و ـ ح ز ـ مثل ـ ح د ـ و ـ ج ه ـ ضعف
ح د ـ فخط ـ ط ب ـ مثل عمود ـ ج ه ـ فا ط ـ هو زيادة
ا ب ـ على ـ عمود ـ ج ه ـ و ـ ط ب ـ هو عمود ـ ج ه ـ و ـ
ط ه ـ هو زيادة ـ ط ب ـ على ـ ه ب ـ و ـ ا ط ـ و ـ ط ه ـ و ـ
ضعف ـ ه ب ـ الذى هو مسقط الحجر لعمود ـ ج ه ـ متوالية
على نسبة فزيادة ـ ا ب ـ على عمود ـ ج ه ـ وزيادة عمود ـ ج

ب ـ علـى ـ ه ب ـ الذى هو مسقطه وضعف ـ ه ب ـ الثلاثة المتوالية على نسبة واحدة وذلك ما اردنا بيانه •

ش ـ ٦



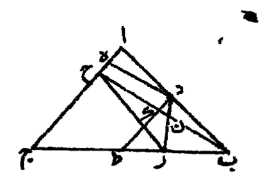
وايضا فليكن مثلث ـ ا ب ج ـ مختلف الاضلاع ولنفرض علـى ضلع من اضـلاعه اى ضلع كان نقطـة ولتكن نقطة ـ د ولنخرج من نقطة ـ د ـ عمودى ـ د ه ـ د ز ـ ونخرج عمود ـ ب ح ـ ونخرج ـ د ك ط ـ موازيا لخط ـ ا ج ـ ونجعل نسبة ب ك ـ الى ـ ك ن ـ كنسبة ـ ب ج ـ الى ـ ج ا ـ فاقول ان عمودى ـ د ه ـ د ز ـ مساويان لعمود ـ ن ح •

برهان ذلك ان نسبة ـ ب ط ـ الى ـ ط د ـ كنسبة ـ ب ج الى ـ ج ا ـ ونسبة ـ ب ج ـ الى ـ ج ا ـ كنسبة ـ ب ط ـ الى ك ن ـ فنسبة ـ ب ط ـ الى ـ ط د ـ كنسبة ـ ب ك ـ الى ـ ك ن ونسبة ـ ب ط ـ الى ـ ط د ـ كنسبة ـ ب ك ـ الى ـ د ز ـ فعمود

د ز

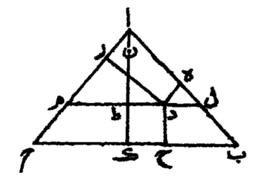
د ز ـ مثل عمود ـ ك ز ـ وعمود ـ ك ه ـ مثل ـ عمود ـ ك ح فعمودا ـ د ز ـ د ه ـ مجموعين مثل عمود ـ ن ح ـ وذلك ما اردنا بيانه •

ش ـ ٧



ولنعد المثلث المختلف الاضلاع وليكن ـ ا ب ج ـ ولنفرض فى داخله نقطة ـ د ـ كيف ما اتفق ولنخرج منها اعمدة ـ د ه د ز ـ د ح ـ ونجيز على نقطة ـ د ـ خطا موازيا لخط ـ ب ج وليكن ـ ل د م ـ ونخرج عمود ـ ا ط ك ـ ونجعل نسبة ـ ا ط الى ـ ط ن ـ كنسبة ـ ب ج ـ الى ـ ج ا ـ فاقول ان مجموع اعمدة ـ د ه ـ د ز ـ د ح ـ الثلاثة مساو لعمود ـ ن ك •

ش ـ ٨



برهان ذلك ان نسبة ـ ل م ـ الى ـ م ا ـ كنسبة ـ ب ج الى ـ ج ا ـ ونسبة ـ ب ج ـ الى ـ ج ا ـ كنسبة ـ ا ط ـ الى ط ن ـ فنسبة ـ ا ط ـ الى ـ ط ن ـ كنسبة ـ ل م ـ الى ـ م ا فعمودا ـ د ه ـ د ز ـ مساويان لعمود ـ ن ط ـ كما تبين فيما تقدم وعمود ـ د ح ـ مثل عمود ـ ط ك ـ فمجموع اعمدة ـ د ه ـ د ز د ح ـ مسا ولعمود ـ ن ك ـ وهذا البرهان مطرد فى جميع المثلثات القائمة والحادة والمنفرجة المختلف الاضلاع والمتساوى الاضلاع وذلك ما اردنا ان نبين •

تمت المقالة فى اعمدة المثلثات

ولله الحمد والصلوات على نبيه محمد وآله ـ فرغت من كتابتها بالموصل المحروسة فى صفر سنة ٦٣٢